ESTADÍSTICA ESPAÑOLA
Núm. 111, 1986, págs. 87 a 103

Identificación automática mediante la función de autocorrelación extendida (*)

por JUAN GEA Y EZEQUIEL URIEL
Universidad Literaria de Valencia

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es el ensayo de diversos procedimientos algorítmicos para aplicar de forma automática la función de autocorrelación extendida, desarrollada por Tsay y Tiao, en la identificación de procesos ARMA.

En el primer epígrafe se hace un resumen de la metodología desarrollada por estos autores a fin de que sirva de referencia inmediata a lo tratado en los epígrafes siguientes. En el epígrafe segundo, y tomando como marco de referencia, la teoría de reconocimiento de patrones se desarrollan procedimientos algorítmicos en base a la función de autocorrelación extendida. Finalmente, en el tercer epígrafe, se efectúan experimentos de simulación en los que se aplican estos procedimientos.

Palabras clave: Modelos ARIMA, función de autocorrelación extendida, simulación de modelos, reconocimiento de patrones, identificación automática.

(*) Los programas de cálculo de la FACEM han sido elaborados por J. Gea.

1. EL METODO DE LA FUNCION DE AUTOCORRELACION EXTENDIDA MUESTRAL (FACEM)

En el planteamiento inicial que efectúan Tsay y Tiao (1981a) sobre la FACEM hacen alusión a los tres tipos de problemas siguientes que se presentan en la elaboración de modelos de series temporales univariantes:

El primer problema se refiere a la inconsistencia de los estimadores minimocuadráticos de los parámetros AR correspondientes a un proceso ARMA.

Como segundo problema plantean las dificultades de identificación de los procesos mixtos ARMA. En efecto, aunque los patrones de comportamiento teórico de las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial propuestas por Box y Jenkins (1970) están claramente definidas, sin embargo la identificación mediante la utilización de las correspondientes funciones muestrales no resulta fácil cuando se trata de procesos mixtos. Con objeto de superar estas deficiencias se han propuesto nuevos métodos de identificación tales como la función de autocorrelación parcial condicionada propuesto por Jenkins y Alavi (1981), el criterio de información (AIC) de Akaike (1974), el array R y el array S de Gray, Kelley y McIntire (1978) y el método de la esquina de Beguin, Gourieoux y Monfort (1980). Al método de AIC, Tsay y Tiao le reprochan que es inconsistente y a los dos últimos citados que sus propiedades estadísticas son desconocidas.

Como último problema, los autores se refieren a la ambigüedad de los procedimientos para la determinación del adecuado orden de diferenciación.

Precisamente con la FACEM Tsay y Tiao tratan de dar una respuesta satisfactoria a estos tres tipos de problemas.

A continuación se examina la elaboración y la aplicación de la FACEM. Previamente se introduce el concepto de regresión iterada en que se basa la construcción de la FACEM.

Regresiones Iteradas

En su exposición Tsay y Tiao presentan el siguiente modelo:

$$\Phi(L)\ Y_t = \theta(L)\ \varepsilon_t \tag{1}$$

donde:

$$\varepsilon_t = \text{ruido blanco}$$

$$\Phi(L) = \phi(L)\ U(L) = 1 - \Phi_1 L \ \ldots - \Phi_p L^p$$

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \ldots - \phi_{p-d} L^{p-d}$$

$$U(L) = 1 - U_1 L - \dots - U_d L^d$$
$$\theta(L) = 1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q$$

Así pues, $\Phi(L)$ es un operador que incluye d raíces unitarias. Según la terminología usual (1) representa un modelo ARIMA $(p-d, d, q)$.

El modelo (1) se puede expresar alternativamente de la siguiente forma:

$$Y_t = \sum_{i=1}^{p} \Phi_i \; Y_{t-i} - \sum_{j=1}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t \tag{2}$$

Aplicando mínimos cuadrados ordinarios para la estimación de los parámetros AR de (2) se obtendrán unos resultados que puedan expresarse como sigue:

$$Y_t = \sum_{i=1}^{p} \Phi_{i(p)}^{(0)} \; Y_{t-i} + \hat{e}_{p,t}^{(0)} \tag{3}$$

El superíndice (0) que aparece tanto en los residuos $\hat{e}_{p,t}^{(0)}$ como en los estimadores de los parámetros señala que se trata de una regresión ordinaria, a diferencia de las que se verán más adelante. La letra p que aparece en los subíndices indica que las estimaciones se han obtenido ajustando un proceso de orden p.

Solamente en procesos ARIMA $(p-d, d, 0)$ o ARIMA $(0, d, q)$ los estimadores obtenidos son consistentes, es decir:

$$\hat{\Phi}_{1(p)} \xrightarrow{p} \Phi_1 \qquad 1 = 1, 2, \dots, p \tag{4}$$

Esta propiedad la han demostrado Mann y Wald (1943) para el caso estacionario y Tsay y Tiao (1981b) para el caso no estacionario.

En los demás casos, los estimadores obtenidos son inconsistentes, y por tanto $\hat{e}_{p,t}^{(0)}$ no convergerá a un ruido blanco ni aunque la muestra sea grande. Precisamente por esta razón, contendrá información acerca del proceso Y_t. De alguna forma, parte de esta información se puede extraer al efectuar la siguiente regresión en la que $\hat{e}_{p,t-1}^{(0)}$ aparece como regresor.

$$Y_t = \sum_{i=1}^{p} \hat{\Phi}_{i(p)}^{(1)} \; Y_{t-i} + \beta_{1(p)}^{(1)} \; \hat{e}_{p,t-1}^{(0)} + \hat{e}_{p,t}^{(1)} \tag{5}$$

En la regresión anterior el superíndice (1) señala que se trata de la regresión iterada primera. Tsay y Tiao (1981a) demuestran que los estimadores obtenidos son consistentes en procesos ARIMA $(p-d, d, 1)$ o ARIMA (O, d, q).

Análogamente con la regresión iterada segunda se obtiene:

$$Y_t = \sum_{i=1}^{p} \hat{\Phi}_{i(p)}^{(2)} \; Y_{t-i} + \beta_{1(p)}^{(2)} \; \hat{e}_{p,t-1}^{(1)} + \beta_{2(p)}^{(2)} \; \hat{e}_{p,t-2}^{(0)} + \hat{e}_{p,t}^{(2)} \tag{6}$$

donde aparecen como regresores $\hat{e}_{p,t-2}^{(0)}$ y $\hat{e}_{p,t-1}^{(1)}$ que son, respectivamente, los residuos correspondientes a la regresión ordinaria (0 cero) y a la regresión iterada primera. Los estimadores obtenidos en (6) son consistentes para procesos ARIMA $(p-d, d, 2)$ o ARIMA (O, d, q).

En general, con la regresión iterada j-ésima de un $AR(K)$ se obtendrán los siguientes resultados:

$$Y_t = \sum_{i=1}^{p} \hat{\Phi}_{i(p)}^{(k)} \; Y_{t-i} + \sum_{i=1}^{j} \beta_{i(p)}^{(j)} \; \hat{e}_{K,t-i}^{(j-i)} + \hat{e}_{K,t}^{(j)} \tag{7}$$

$$t = k+j+1 \;...\; T; \qquad j=0,\; 1,\; ...,\; ; \qquad K=1,\; 2,\; ...$$

Los estimadores obtenidos en (7) serán consistentes para procesos ARIMA $(p\text{-}d, d, q)$ en caso de que $q \leqslant k$ o bien para procesos ARIMA (O, d, q) sin ninguna restricción en este caso sobre q.

Elaboración de la FACEM

En base a las estimaciones consistentes obtenidas en las regresiones iteradas se construye la función de autocorrelación muestral extendida (FACEM), correspondiente a distintos ordenes. A continuación se examina cómo se obtiene la FACEM de orden 0,1 y K. Se considerará que el proceso Y_t sigue un ARMA (p, q) donde las raíces de p pueden ser unitarias.

a) FACEM de orden 0.

Si $p=0$, el proceso Y_t seguirá un $MA(q)$ con lo que

$$r_{j(0)} = 0 \text{ para } j > q.$$

siendo $r_{j(0)}$ el coeficiente de autocorrelacción muestral ordinario de orden j de la serie original Y_t. Con el subíndice 0 se indica precisamente que no se ha realizado ninguna transformación en Y_t. Así pues, la función de autocorrelacción muestral ordinaria FACEM constituye la FACEM de orden0.

b) FACEM de orden 1

Si $p=1$, entonces el proceso Y_t seguirá un ARMA$(1, q)$. Ahora bien, el proceso

$$W_t = Y_t - \hat{\Phi} \; Y_{t-1},$$

seguirá un proceso $MA(q)$, si $\hat{\Phi}_1$ es un estimador consistente de Φ_1. Como j es en principio desconocido, no sabemos cuantas regresiones iteradas serán necesarias para obtener un estimador de Φ_1 consistente. Consideremos por ello distintos supuestos de valores de q.

i) Para $q=0$, $\hat{\Phi}^{(j)}_{1(1)} \xrightarrow{p} \hat{\Phi}_1$ para $j \geqslant 0$.

Por tanto,

$$W^{(0)}_{1,t} = Y_t - \hat{\Phi}^{(0)}_{1(1)}\ Y_{t-1}$$

seguirá asintóticamente un ruido blanco.

$$r_s(W^{(0)}_{1,t}) = 0 \quad \text{para } s \geqslant 0.$$

ii) Para $q=1$, $\hat{\Phi}^{(j)}_{1(1)} \xrightarrow{p} \Phi_1$ para $j \geqslant 1$.

Por tanto,

$$W^{(1)}_{1,t} = Y_t - \Phi^{(1)}_{1(1)}\ Y_{t-1}$$

seguirá asintóticamente un $MA(1)$

$$r_s(W^{(1)}_{1,t}) = 0 \quad \text{para } s > 1.$$

iii) En general para $q \neq 0$, $\hat{\Phi}^{(j)}_{1(s)} \xrightarrow{p} \Phi_1$ para $j \geqslant q$.

Por tanto,

$$W^{(q)}_{1,t} = Y_t - \Phi^{q}_{1(1)}\ Y_t,$$

seguirá asintóticamente un $MA(q)$

$$r_s(W^{q}_{1,t}) = 0 \quad \text{para } s > q.$$

A la vista de los anteriores supuestos se define

$$r_{j(1)} = r_j(W^{(j)}_{1,t})\ j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

que constituye la FACEM de orden 1. Obsérvese que coinciden el orden de la regresión iterada y el retardo del coeficiente de autocorrelación. La FACEM de primer orden goza de la propiedad de corte, ya que verifica que:

$$r_{j(1)} = 0 \quad \text{para } j > q \text{ y } p = 0 \tag{9}$$

c) FACEM de orden p

En general se define

$$r_j(k) = r_j(W_{k,t}^{(j)}) \quad j = 1, 2, 3, \ldots$$

donde

$$W_{k,t}^{(j)} = \Phi_k^{(j)}(L)\, Y_t$$

Si el verdadero modelo es un ARMA (p, q), entonces para $k = p$ $j \geqslant q$, $W_{k,t}^{(j)}$ seguirá asintóticamente un ARMA (p, q). En consecuencia, la FACEM de orden p tendrá el siguiente comportamiento

$$r_{j(k)} \begin{cases} \doteq 0 \text{ para } j > q \text{ y } k = p \\ \neq 0 \text{ para } j = q \text{ y } k = p \end{cases} \tag{10}$$

Es decir, la FACEM de orden p procedente de un proceso ARMA (p, q) tiene la misma propiedad de «corte» que la función de autocorrelacción ordinaria de un proceso puro MA de orden q. Por otra parte, como la FACEM es una autocorrelacción muestral de una serie transformada, sus propiedades muestrales pueden obtenerse de los conocidos resultados asintóticos de la función de autocorrelacción muestral ordinaria.

La FACEM es un instrumento de identificación para determinar precisamente los valores de p y q en la elaboración de un modelo ARMA. Por tanto, p y q son desconocidos «a priori». Por ello el problema que se plantea es el siguiente: ¿qué ocurre cuando se calcula una FACEM de orden k superior al verdadero valor de p? En (10) se ha adoptado el supuesto de que $k = p$. Ahora interesa ver cuál es el comportamiento de $r_j(k)$ para $k - p > 0$. En este caso se habrá ajustado un modelo con más términos AR de los necesarios, es decir, se tratará de un ajuste excesivo o «overfitting». La consecuencia de este ajuste excesivo es que se incrementa el orden del polinomial MA de la serie transformada $W_{k,t}^{(j)}$, y el número de términos adicionales viene dado por $\min(k - p, j - q)$.

Teniendo en cuenta lo anterior, la FACEM de orden k tendrá el siguiente comportamiento asintótico para distintos valores de p y q

$$r_{j(k)} = \begin{cases} c(k-p, j-q) & 0 \leqslant j - q \leqslant k - p \\ 0 & j - q > k - p > 0 \end{cases} \tag{11}$$

donde $c(k-p, j-q)$ es alguna constante no cero o una variable aleatoria continua acotada entre -1 y 1.

Aplicación de la FACEM en el proceso de identificación

A continuación se examinará como Tsay y Tiao utilizan la FACEM en la identificación de un proceso ARMA (p, q).

Con las funciones FACEM de distintos órdenes se construye una tabla en la que cada fila es la FACEM de distinto orden según puede verse en la figura 1. A esta tabla conjunta nos referimos en lo sucesivo con la denominación implícita de FACEM.

MA AR	0	1		q		m
0	$r_1(0)$	$r_2(0)$	...	$r_{q+1}(0)$	...	$r_{m+1}(0)$
1	$r_1(1)$	$r_2(1)$	...	$r_{q+1}(1)$	...	$r_{m+1}(1)$
⋮	....	....	....	....	....	....
⋮						$m1$
p	$r_1(p)$	$r_2(p)$	...	$r_{q+1}(p)$	...	$r_{m+1}(p)$
$p+1$	$r_1(p+1)$	$r_2(p+1)$	...	$r_{q+1}(P+1)$	...	$r_{m+1}(p+1)$
	....	....	....	....	....	....
				$m2$		$m3$

Figura 1. FACEM de un proceso ARMA (p, q).

De acuerdo con (11), si el verdadero proceso es un ARMA (p, q) los valores que asintóticamente son igual a 0, forman un triángulo dos de cuyos lados vienen dados por las rectas m_1 y m_3. En cambio los elementos situados entre las rectas m_2 y m_3 no tienden asintóticamente a 0, a causa del ajuste excesivo. El vértice del ángulo formado por las rectas m_1 y m_3 señala el orden de la parte AR —en este caso p— y el orden de la parte MA —en este caso q—. En algunas ocasiones nos referiremos a este ángulo en la denominación de ángulo identificador. Si se sustituye los coeficientes $r_{j(k)}$ por 0 o X según que asintóticamente tienden o no a cero, se obtiene una tabla a la que designaremos matriz binaria de significación. En la figura 2, se recoge la FACEM asintótica de significación binaria correspondiente a un ARMA (p, q).

MA / AR	0	1		q	$q+1$	$q+2$
0	X	X	...	X	X	X
1	X	X	...	X	X	X
⋮	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
p	X	X	...	0	0	0
$p+1$	X	X	...	X	0	0
$p+2$	X	X	...	X	X	X
⋮						

Figura 2. Matriz binaria de significación correspondiente a un proceso ARMA (p, q).

La matriz binaria de significación facilita al analista la búsqueda del ángulo identificador.

2. LA IDENTIFICACION COMO RECONOCIMIENTO DE PATRONES

Los autores Tsay y Tiao ofrecen, como hemos visto, unas reglas para proceder a la identificación de una serie temporal mediante la utilización de la FACEM. Como es sabido la FACM y la FACPM constituyen las reglas tradicionales utilizadas en la identificación de los modelos ARIMA. En general, una cuestión que puede plantearse a este respecto es la siguiente: ¿la aplicación de las reglas de identificación es un «arte» o por el contrario es un procedimiento susceptible de implementación algorítmica? La cuestión planteada tiene su motivación ya que muchos autores han venido sosteniendo que la identificación de un modelo ARIMA constituye un «arte» que únicamente podrá ser aplicado por analistas experimentados. Con este planteamiento parece excluirse la posibilidad de identificación mediante procedimientos algorítmicos o, en definitiva, la posibilidad de identificación de forma automática con utilización de un ordenador electrónico (1).

En nuestra opinión, si en alguna forma tiene sentido hablar de la identificación de un modelo ARIMA como un «arte» es debido a que las reglas de identificación que se aplican no están formuladas de forma explícita, o lo

(1) Existen no obstante numerosos autores que han investigado la problemática de la identificación automática. En este sentido puede destacarse el trabajo de Valls y Prats (1983).

que es peor, no existe un acuerdo completo entre los diferentes analistas sobre cuáles son las reglas a aplicar. Por todo ello, opinamos que debe realizarse un esfuerzo en la discusión sobre la formulación de las reglas de identificación.

Volviendo a la pregunta que ha dado origen a esta breve disgresión vamos a realizar una búsqueda de las posibilidades de construir algoritmos que permita utilizar automáticamente la FACEM, ordinaria o simbólica, en el proceso de identificación de un modelo ARIMA. Como marco teórico de referencia para esta búsqueda vamos a utilizar la teoría de reconocimiento de patrones (2).

Bajo el supuesto de que una serie temporal dada es una realización finita de un proceso estocástico ARMA (p, q) siendo p, q parámetros desconocidos, el proceso de reconocimiento consiste en asignar una serie $S_y = \{Y_t\}_{t=1}^{T}$ a una clase $C_{p,q}$, siendo $C_{p,q}$ el conjunto de realizaciones finitas de procesos ARMA (p, q) con p, q dados.

Como no es posible realizar el reconocimiento directamente a partir de los valores observados de la serie S_Y es preciso recurrir a la obtención de unos estadísticos a partir de estos valores observados que se considera, quizás con un cierto grado de discrecionalidad, resumen la información útil para asignar la serie a una determinada clase $C_{p,q}$.

Se ha elegido la FACEM como resumen de la información a emplear en el proceso de reconocimiento.

Así pues, el problema queda planteado de la siguiente forma: dada una FACEM se asigna la clase $F_{p,q}$ que minimiza el riesgo de una clasificación errónea (Escudero, 1977), siendo $F_{p,q}$ el conjunto de FACEM asociadas a las realizaciones finitas de procesos ARMA (p, q) con p, q conocidos.

La clasificación se realiza asociando una función discriminante, que designaremos por $g_{r,s}$(FACEM), a cada clase $F_{r,s}$, de tal manera que un nuevo patrón, o FACEM$_y$, obtenido de la serie observada Y_t lo asignaremos a la clase $F_{\hat{p},\hat{q}}$ tal que:

$$g_{\hat{p},\hat{q}}(\text{FACEM}_y) = \underset{\forall r,\, \forall s}{\text{MAXIMO}} \{g_{r,s}(\text{FACEM}_y)\} =$$

$$= \underset{\forall r,\, \forall s}{\text{MINIMO}} \{-g_{r,s}(\text{FACEM}_y)\}$$

(2) Sobre las posibilidades de aplicación de la técnica de reconocimiento de patrones puede verse la obra de Escudero (1977).

En la práctica $r \varepsilon \{0 \ldots r_{\text{máx}}\}$ y $s \varepsilon \{0 \ldots s_{\text{máx}}\}$ con $r_{\text{máx}}$ y $s_{\text{máx}}$ conocidos y fijos.

Se obtiene así una estimación $(\hat{p}, \hat{q})$, de (p, q).

Si se conociera la distribución de cada (r, s) condicionada a la FACEM, la función discriminante se definiría así:

$$g_{r,s}\,(\text{FACEM}) = P(F_{r,s} \mid \text{FACEM})$$

siendo $P(F_{r,s} \mid \text{FACEM})$ la probabilidad de que se trate de un proceso de orden r, s condicionada a la FACEM.

Como éste no es el caso, se va a utilizar un método heurístico, es decir, se postulará las funciones discriminantes y se considerarán más o menos aceptables en función de los resultados de la simulación.

Se puede hacer así porque a partir de la FACEM el problema de la identificación se convierte en el problema de reconocer visualmente una forma geométrica sencilla.

A partir de aquí se interpreta la FACEM como una imagen discreta teniendo cada punto asociado un valor igual al valor absoluto correspondiente de la FACEM. Si se asimila este valor a una intensidad lumínica entonces el problema consiste en reconocer una forma triangular clara y una orientación determinada sobre un fondo oscuro (Kaufmann, 1975).

En una primera aproximación se parte de la matriz binaria de significación (MBS) de la FACEM. En esta matriz, como se ha visto antes, un elemento es igual a uno si el correspondiente valor de la FACEM es significativo y cero en caso contrario.

Se procederá a comparar esta MBS muestral con las correspondientes MBS de las FACE teóricas asociadas a los diversos procesos

$$\left\{\text{ARMA}\,(i, j)\right\}_{i=0,\ j=0}^{i=r_{\text{máx}},\ j=s_{\text{máx}}}$$

Se entenderá como FACE teórica la FACEM que se obtendría a partir de una serie de tamaño infinito generada por un proceso ARMA determinado.

Con estos elementos se puede definir la función discriminante asociada a la clase $F_{r,s}$ como la distancia «Hamming» entre *MBS* de la FACEM $(MBSM_y)$ y la *MBS* teórica $(MBST_{r,s})$ asociada a la clase $F_{r,s}$. Esta distancia tiene la siguiente expresión:

$$d(MBST_{r,s},\ MBSM_y) = \sum_{i=0}^{r_{max}} \sum_{j=0}^{s_{max}} |MBST_{r,s}(i,j) - MBSM_y(i,j)| \qquad (13)$$

Se elegirá la clase $F_{p,q}$ tal que:

$$d(MBST_{p,q},\ MBSM_y) = \text{MINIMO}\ \{d(MBST_{r,s},\ MBSM_y)\} \qquad (14)$$
$$\forall r,\ r \varepsilon \{0, \ldots, r_{\text{máx}}\}$$
$$\forall s,\ s \varepsilon \{0, \ldots, s_{\text{máx}}\}$$

Este mecanismo de clasificación presenta dos inconvenientes:

a) Infrautilización de la información por trabajar sobre niveles de significación. En otras palabras, se utiliza una imagen en blanco y negro dejando de lado todos los matices del gris.

b) No todos los elementos de la FACEM tienen la misma importancia a la hora de reconocer un ángulo identificador que clasifique la serie como generada por un proceso ARMA (p, q).

La figura 3 representa la *MBS* de la *FACET* asociada a un proceso *ARMA* (1, 1). La figura 4 representa la *MBS* asociada a una FACEM.

MA / AR	0	1	2	3	4
0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0
3	1	1	1	0	0
4	1	1	1	1	0

Figura 3. MBS de la FACET de un proceso ARMA (1, 1).

	0	1	2	3	4
0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0
2	1	1	0	0	0
3	1	1	1	0	0
4	1	1	1	1	0

Figura 4. MBS de una' FACEM.

La *MBS* de la figura 4 no se clasificaría como un *ARMA* (1,1) por ser *MBSM* (1,1) = 1, es decir, por la presencia de un uno en la intersección de la fila uno con la columna uno.

Sin embargo por simple inspección se concluye que la distancia «Hamming» entre las matrices de las figuras 3 y 4 vale 1, mientras que la distancia de la matriz de la figura 4 respecto a la *MBS* correspondiente a un modelo *ARMA* (1,2) es 3. Con el actual criterio de clasificación se hubiera asignado el ejemplo de la figura 4 a un *ARMA* (1,1) siendo lo razonable asignarlo a un *ARMA* (1,2).

Un ejemplo más ambiguo respecto al proceso *ARMA* que lo genera es la *MBS* de una supuesta FACEM representada en la figura 5.

MA / AR	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0
2	1	1	0	0	0	0
3	1	1	1	1	0	0
4	1	1	1	1	0	0

Figura 5. MBS de una función FACEM.

Los dos 1 que aparecen en las filas 1 y 3 de la columna 3 dificultan la identificación de un proceso *ARMA* (1,1), sería necesario consultar los valores de la FACEM y no sólo los niveles de significación para tomar una decisión.

De estos ejemplos se concluye que no se debe ponderar con los mismos pesos los elementos que definen el principio del ángulo identificador y los elementos de lo que se podría llamar su cola.

Un intento de obviar estos problemas consistiría en sustituir la matriz binaria de significación de la FACE teórica por un conjunto de matrices binarias que se consideran asociadas al mismo proceso *ARMA*(p, q). Entonces se definirían las funciones discriminantes como la distancia de la matriz binaria muestral a estos conjuntos. Se trata de la distancia de un elemento a un conjunto. Esta modificación del método de clasificación sigue infrautilizando información y además plantea la tarea de enumerar las matrices binarias asociadas a cada proceso *ARMA* (p, q). Por estas razones se ha rechazado también este procedimiento. Finalmente el método escogido, que se ha aplicado en el epígrafe 3, no utiliza el concepto de distancia entre la FACEM y la FACET sino que asocia a cada punto de la imagen discreta que se intenta reconocer una función (discriminante) que evalúa en qué medida de ese punto arranca un vértice identificador.

Dado que carece de sentido comparar directamente elementos de la FA-CEM$_y$ entre sí, es necesario estandarizar la FACEM$_y$ dividiendo cada uno de sus elementos por la estimación de su correspondiente desviación típica y al valor absoluto de este cociente se resta 1,96 ya que se ha utilizado un nivel de significación del 5 %. Al resultado de este proceso se le llamará función de autocorrelación entendida estandarizada de la serie Y_y (FACEMS):

$$\text{FACEMS}(i, j) = \frac{\text{FACEM}(i, j)}{\text{DFACEM}(i, j)} - 1{,}96 \tag{15}$$

$$i = 0, \ldots, r_{\text{máx}}$$
$$j = 0, \ldots, r_{\text{máx}}$$

Siendo DFACEM la estimación de la desviación típica de los elementos de la FACEM.

Las funciones discriminantes seleccionadas son lineales:

$$y_{r,s}(\text{FACEMS}_y) = \sum_{i=0}^{r_{max}} \sum_{j=0}^{s_{max}} a_{r,s}(i, j) * \text{FACEMS}(i, j) \tag{16}$$

Los coeficientes $a_{rs}(i, j)$ se podría estimar a partir de un conjunto de FA-CEMS generadas de series obtenidas por simulación, y que por lo tanto se tiene controlada la clase a que pertenecen. Es un camino relacionado con la obtención por simulación de la función de distribución en el muestreo de la FACEM. Sin embargo se ha optado por determinar a priori el valor de estos coeficientes.

En la determinación de este valor de los coeficientes se ha considerado de forma separada el signo y el valor absoluto.

El signo se ha definido de la siguiente forma:

$$\text{SIGNO}\,(a_{r,s}(i, j)) = s_{r,s}(i, j) \tag{17}$$

$$S_{r,s}(i, J) = \begin{cases} 1 & i < r \;\; V \; i - r > j - s \\ -1 & 0 \leqslant i - r \leqslant j - s \end{cases} \tag{18}$$

Esto significa que todos los elementos que forman parte del ángulo identificador entran restando y el resto sumando. Por lo tanto las funciones discriminantes alcanzan valores mayores cuanto más claramente se recorte una forma triangular sobre el fondo.

Por otra parte el valor absoluto $a_{r,s}(i, j)$ debe ser función de la distancia entre los elementos (r, s) e (i, j). De tal manera que a un elemento más alejado del vértice identificador le corresponda pesos menores. Así se recoge la consideración de la mayor importancia en la definición del ángulo identificador de los elementos del origen respecto de los elementos de la cola.

Se ha postulado por simplicidad

$$a_{r,s}(i, j) = a^{d[(r,s),(i,j)]}$$
$$0 < a < 1$$

Donde $d[(r, s)\ (i, j)]$ es la distancia entre dos elementos.

Se considera que una imagen discreta, una malla, los ocho puntos circundantes a uno dado se hallan igualmente distantes. De ahí que la distancia entre dos puntos dados se pueda definir como el menor número de puntos que hay que recorrer para trasladarse de uno a otro.

Así pues:

$$d[(r, s), (i, j)] = \text{MAXIMO}\ [|r-i|, |s-j|] \tag{19}$$

Es trivial comprobar que cumple los axiomas de la categoría de distancia.

En resumen:

$$g_{r,s}(\text{FACEMS}_y) = \sum_{i=0}^{r_{max}} \sum_{j=0}^{s_{max}} S_{r,s}(j, i) \cdot a^{d((r,s),(i,j))} \cdot \text{FACEMS}_y(i, j) \tag{20}$$

Y por los resultados de los ejercicios de simulación que se han llevado a cabo se ha escogido en base a distintas pruebas realizadas un $\alpha = 0{,}65$.

3. RESULTADOS DE SIMULACION

Con objeto de tener una primera aproximación acerca de la eficacia del clasificador propuesto en (20), se han efectuado simulaciones mediante el método de Montecarlo (3).

(3) Sobre el análisis de la identificación mediante Métodos de Montecarlo de modelos ARMA utilizando la FACM y la FACPM y con otro enfoque distinto, puede verse el trabajo de Fernández (1984).

En los experimentos llevados a cabo se han simulado series de 200 observaciones, realizándose 100 réplicas para cada conjunto de parámetros. Presentamos los resultados correspondientes a tres tipos de modelos con los siguientes parámetros.

AR(1) ... $\phi_1 = 0,5$
MA(1) ... $\theta_1 = 0,5$
ARMA(1,1) ... $\phi_1 = 0,5$; $\theta_1 = -0,5$

Los resultados correspondientes a las 100 réplicas de cada tipo de experimento se recogen, respectivamente, en las figuras 6, 7 y 8.

MA / AR	0	1	2	3	4	5
0	0	6	1	0	0	0
1	61	13	0	0	0	0
2	1	16	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0

Figura 6. Identificación de las 100 réplicas en un modelo AR (1) con $\phi_1 = 0,5$.

MA / AR	0	1	2	3	4	5
0	0	71	0	0	0	0
1	2	14	0	0	0	0
2	3	6	1	0	0	0
3	1	1	1	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0

Figura 7. Identificación de 100 réplicas en un modelo MA (1) con $\theta_1 = 0,5$.

MA / AR	0	1	2	3	4	5
0	0	6	0	0	0	0
1	0	81	1	0	0	0
2	2	6	0	0	0	0
3	2	1	1	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0

Figura 8. Identificación de 100 réplicas en un modelo ARMA (1, 1) con $\phi_1 = 0{,}5$ y $\theta_1 = -0{,}5$.

Se podría esperar a priori que, siendo idéntica la magnitud de los parámetros, el valor de los modelos en cuanto a dificultad creciente en la identificación sería el siguiente: AR(1), MA(1) y ARMA (1,1). Justamente los resultados obtenidos han sido los contrarios. Se han examinado los modelos mal identificados, y en su mayor parte la identificación llevada a cabo por el clasificador se corresponde con la que resultaría de la inspección visual, utilizando la MBS. Sin embargo, existen algunos casos residuales en los que el clasificado funcione peor que la inspección visual. En contrapartida, el clasificador ha identificado correctamente modelos en casos en que sería difícil de llegar a idéntica conclusión por inspección visual.

A la vista de los resultados obtenidos se ha llegado a la conclusión de que es posible introducir alguna mejora en el clasificador. Nuestra intención es trabajar en esta línea, explorando de forma sistemática las posibilidades de identificación con diferentes clasificadores. Alternativamente a la FACEM se utilizarán también métodos alternativos de identificación como el método de la esquina. Con objeto de dar la mayor generalidad posible a los experimentos se considerarán distintos tamaños de muestra, distintos valores de los parámetros así como distintos tipos de modelos ARMA.

REFERENCIAS

AKAIKE, H. (1974): *A new look at the statistical model identification*, IEEE Transactions of Automatic Control, AC-19. 716-723.

BEGUIN, J. M.; GOURIEROUX, C., y MONFORT, A. (1980): *Identification of a mixed autoregressive-moving average process: the corner method*. En Time Series, ed. O. D. Anderson, Amsterdam: North-Holland, 423-436.

BOX, G. E. P., y JENKINS, G. M. (1970): *Time Series Analysis, Forecasting and Control*. San Francisco: Holdan-Day.

ESCUDERO, L. F. (1977): *Reconocimiento de patrones*. Editorial Paraninfo. Madrid.

FERNÁNDEZ, R. E. (1984): *Análisis de identificación de modelos ARIMA mediante simulación con métodos de Montecarlo*. Universidad de Santiago de Compostela. Tesis Doctoral.

GRAU, W.; KELLEY, G. D., y MCINTIRE, D. D. (1978): *A new approach to ARMA modeling*, Communications in Statistics, 87, 1-77.

JENKINS, G. M., y ALAVI, A. S. (1981): *Some aspects of modeling and forecasting multivariate time series*, Journal of Time Series Analysis, 2, 1-47.

KAUFMANN, A. (1975): *Introduction à la theórie des sous-ensembles flous*. Masson et cie. editeurs. Paris.

MANN, H. B., y WALD, A. (1943): *On the statistical treatment of linear stochastic difference equations*, Econometrica, 11, 173-220.

TIAO, G. C., y TSAY, R. S. (1981 a): *Consistent estimates of autoregresive parameters and extended sample autocorelation function for stationary and non stationary ARMA models*. Technical report num. 683. Departament of Statistics. University of Wisconsin. Madison.

TIAO, G. C., y TSAY, R. S. (1981 b): *Consistency properties of least squares estimates of autoregressive parameters in ARMA models*. Technical Report n.º 658, Departament of Statistics, University of Wisconsin, Madison.

VALLS, M., y PRAT, A. (1983): *Identificación automática de series temporales*. Comunicación presentada en el VII Simposium de Teoría Económica y Econometría. Sitges.

SUMMARY

AUTOMATIC IDENTIFICATION USING THE EXTENDED AUTOCORRELATION FUNCTION

The aim of this paper is to essay different algorithm procedures in order to apply to the identification of ARMA process, the extended autocorrelation function, developed by Tsay and Tiao.

A comment to the methodology developed by these authors is made in the first instance.

Adopting the theory of pattern recognition as the basic frame we develop the algorith procedures necessary to make simulation experiments.

Key words: ARIMA Models, Extended autocorrelation function, Model simulation, pattern recognition, automatic identification.

AMS, 198. Subject classification. 62M10, 90A20.